

- مبرهنة (7): في أي زمرة طبولوجية G توجد جملة أساسية $\{U\}$ من مجاورات للعنصر الحيادي e بحيث أن:

① كل U تكون تناظرية ومغلقة.

② من أجل أي U من $\{U\}$ يوجد عنصر V من $\{U\}$ بحيث يكون $V^2 \subseteq U$.

③ من أجل أي U من $\{U\}$ و $a \in G$ يوجد عنصر V من $\{U\}$ بحيث يكون:
$ava^{-1} \subseteq U$ أي $V \subseteq a^{-1}Ua$.

- البرهان:

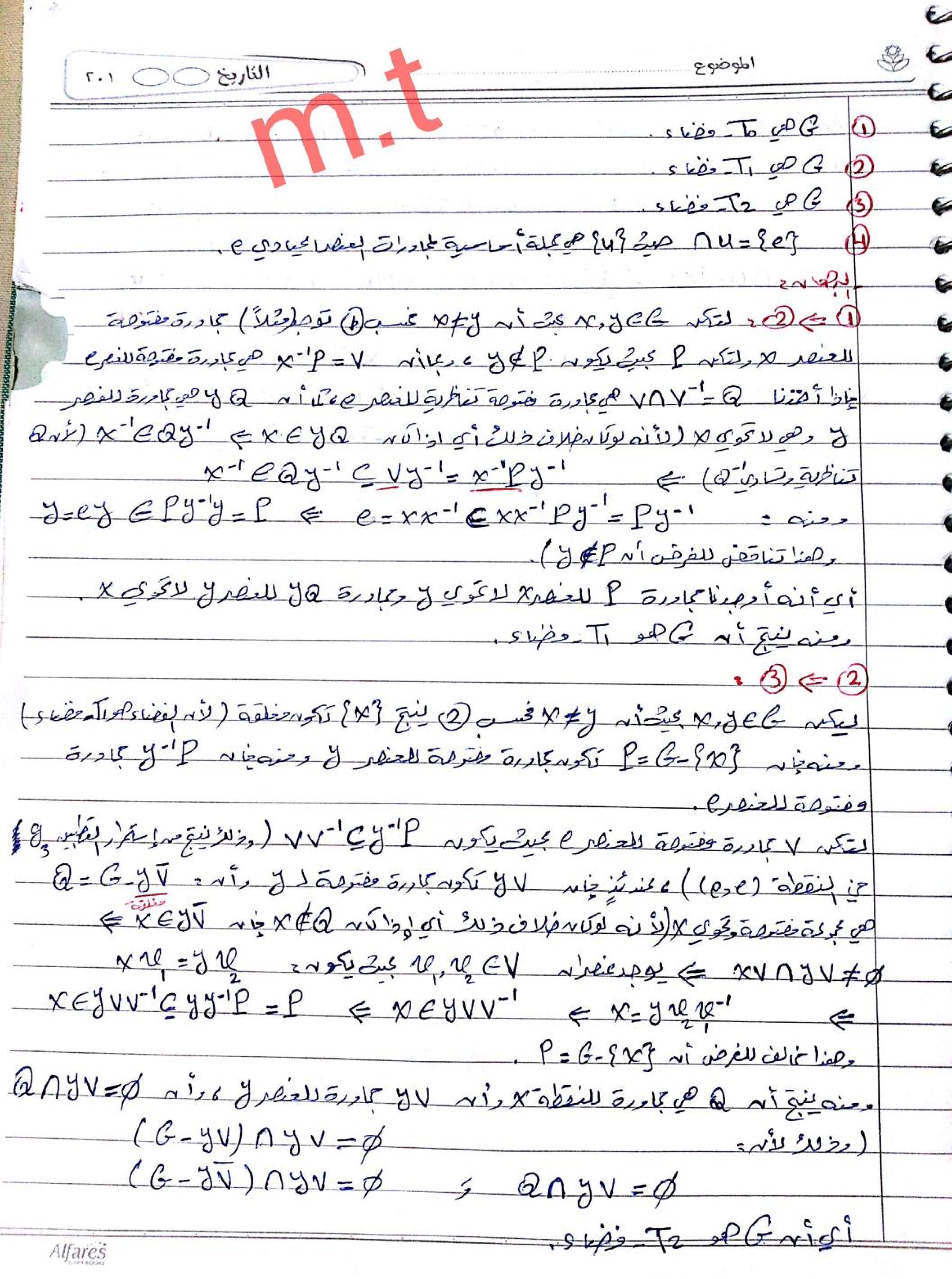
① بما أن G زمرة طبولوجية حسب المبرهنة (6) فإن $\{\bar{V}\}$ حيث V مجاورة لـ e تشكل جملة أساسية لمجاورات العنصر الحيادي e، فإذا أخذنا: $U = \bar{V} \cap \bar{V}^{-1}$
عندئذٍ فإن الأسرة $\{U\}$ تكون جملة أساسية لمجاورات العنصر الحيادي e.
وأن أي عنصر U يكون مجموعة مغلقة وتناظرية (لأن $U^{-1} = U$).

② $\forall U \in \{U\}$ توجد مجاورتين للعنصر e فلتكن U_1, U_2 بحيث يكون $U_1 U_2 \subseteq U$ (لأن g مستمر في النقطة (e,e)).
فإذا أخذنا $V = U_1 \cap U_2$ يكون:
$$V^2 = VV = (U_1 \cap U_2)(U_1 \cap U_2) \subseteq U_1 U_2 \subseteq U$$
أي أننا وجدنا مجاورة V للعنصر e بحيث يكون $V^2 \subseteq U$.

③ بما أن التطبيق: $f: G \longrightarrow G$ هوميومورفيزم
$x \longrightarrow axa^{-1}$
وحسب التطبيق f فإن: $f(e) = aea^{-1} = e$ والتطبيق f هوميومورفيزم وهو مستمر في النقطة e، وبالتالي من أجل أي مجاورة U للعنصر e توجد مجاورة V للعنصر e بحيث يكون: $f(V) \subseteq U$
$aVa^{-1} \subseteq U$
ومنه: $aa^{-1}Va^{-1} \subseteq a^{-1}U \Leftarrow Va^{-1} \subseteq a^{-1}U \Leftarrow V \subseteq a^{-1}Ua$

* موضوعات الفصل في الزمر الطبولوجية:

- مبرهنة (8):
من أجل أي زمرة طبولوجية G فإن القضايا التالية متكافئة:



(1) G هي T_0 - فضاء.

(2) G هي T_1 - فضاء.

(3) G هي T_2 - فضاء.

(4) $\cap U = \{e\}$ حيث $\{U\}$ هي جملة أساسية لمجاورات العنصر المحايد e.

البرهان:

(1) ⇐ (2): لتكن $x, y \in G$ بحيث أن $x \neq y$ فحسب (1) توجد (مثلاً) مجاورة مفتوحة للعنصر x ولتكن P بحيث يكون $y \notin P$ ، وبما أن $V = x^{-1}P$ هي مجاورة مفتوحة للعنصر e فإذا أخذنا $Q = V \cap V^{-1}$ هي مجاورة مفتوحة تناظرية للعنصر e فإن yQ هي مجاورة للعنصر y وهي لا تحوي x (لأنه لو كان بخلاف ذلك أي إذا كان $x \in yQ \Leftarrow x^{-1} \in Qy^{-1}$ (لأن Q تناظرية وتساوي Q^{-1}) $\Leftarrow x^{-1} \in Qy^{-1} \subseteq Vy^{-1} = x^{-1}Py^{-1}$

ومنه: $e = xx^{-1} \in xx^{-1}Py^{-1} = Py^{-1} \Leftarrow y = ey \in Py^{-1}y = P$

وهذا تناقض للفرض أن $y \notin P$).

أي أنه أوجدنا مجاورة P للعنصر x لا تحوي y ومجاورة yQ للعنصر y لا تحوي x.

ومنه ينتج أن G هو T_1 - فضاء.

(2) ⇐ (3):

ليكن $x, y \in G$ بحيث أن $x \neq y$ فحسب (2) ينتج $\{x\}$ تكون مغلقة (لأن الفضاء هو T_1 - فضاء) ومنه فإن $P = G - \{x\}$ تكون مجاورة مفتوحة للعنصر y ومنه فإن $y^{-1}P$ مجاورة مفتوحة للعنصر e.

لتكن V مجاورة مفتوحة للعنصر e بحيث يكون $VV^{-1} \subseteq y^{-1}P$ (وذلك ينتج من استمرار التطبيق g_3 في النقطة (e,e)) وعندئذٍ فإن yV تكون مجاورة مفتوحة لـ y وأن: $Q = G - y\bar{V}$ هي مجموعة مفتوحة وتحوي x (لأنه لو كان بخلاف ذلك أي إذا كان $x \notin Q$ فإن $x \in y\bar{V}$ (مغلقة) $\Leftarrow$ $xV \cap yV \neq \emptyset \Leftarrow$ يوجد عنصران $v_1, v_2 \in V$ بحيث يكون $xv_1 = yv_2$ $\Leftarrow x = yv_2v_1^{-1} \Leftarrow x \in yVV^{-1} \Leftarrow x \in yVV^{-1} \subseteq yy^{-1}P = P$

وهذا خلاف للفرض أن $P = G - \{x\}$.

ومنه ينتج أن Q هي مجاورة للنقطة x وأن yV مجاورة للعنصر y ، وأن $Q \cap yV = \emptyset$

(وذلك لأن: $(G - yV) \cap yV = \emptyset$

$(G - y\bar{V}) \cap yV = \emptyset$ ، $Q \cap yV = \emptyset$

أي أن G هو T_2 - فضاء.

③ ⇐ ④ ، لتكن $x \in \cap u \Leftarrow x \in u$ وذلك من أجل أي $u \in \{u\}$ ولنفرض

جدلاً أن $x \neq e$ ، عندئذٍ حسب ③ بما أن G هو T_2 فضاء ⇐ G هو T_0 فضاء.

⇐ توجد مجاورة مفتوحة P للنقطة e بحيث يكون $x \notin P$

فعندئذٍ يوجد عنصر $u \in \{u\}$ بحيث يكون $x \notin u \subseteq P$ وهذا يناقض كون

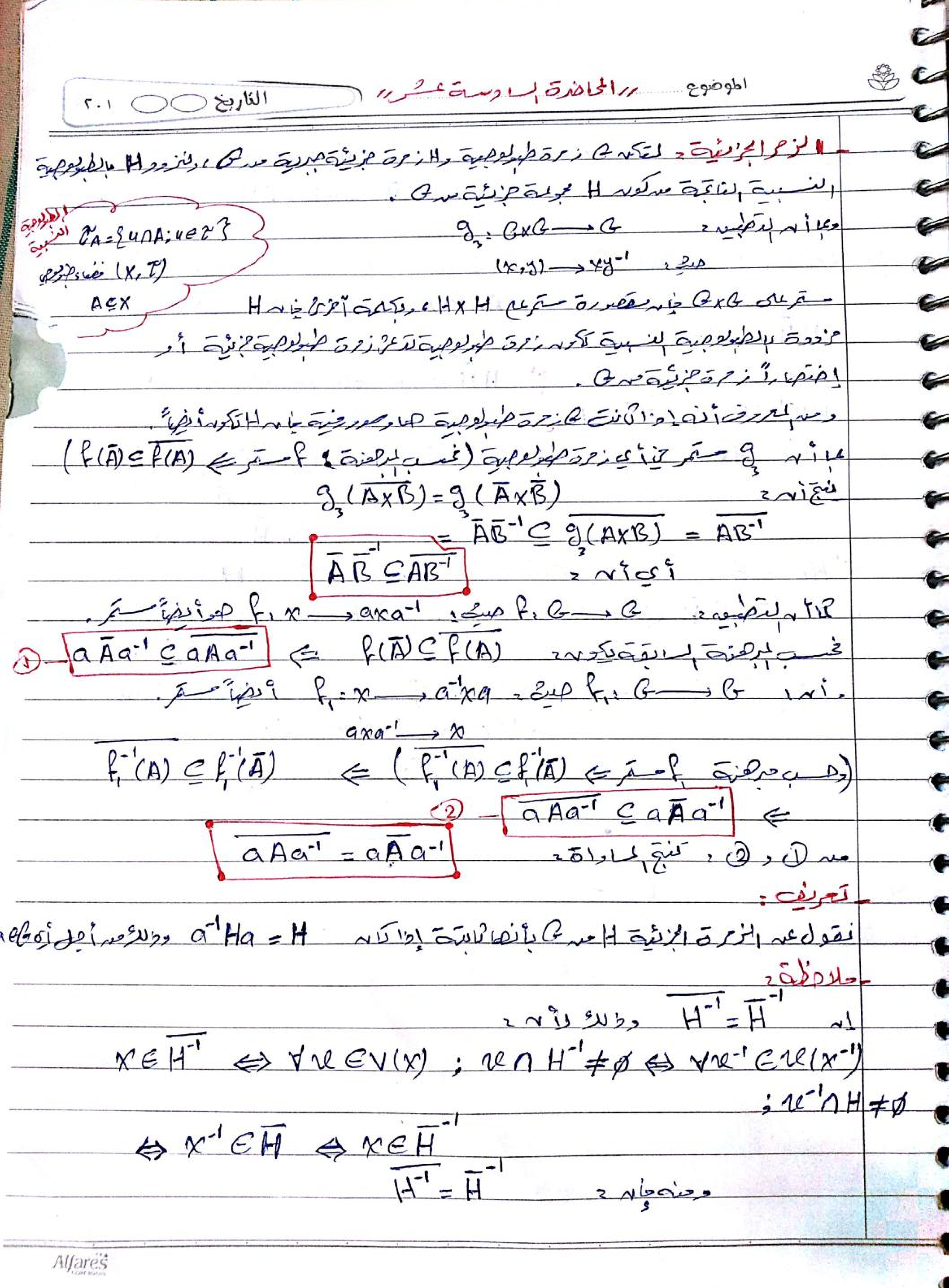
$x \in u \; ; \; \forall u \in \{u\}$ ، إذاً فالفرض الجدلي خاطئ ومنه ينتج أن $\cap u = \{e\}$.

④ ⇐ ① : (صرنا بدنا)

لتكن $x \neq y \Leftarrow x y^{-1} \neq e$ وبالاعتماد على ④ توجد مجاورة $u \in \{u\}$ بحيث لا يكون

$x y^{-1} \notin u \Leftarrow x \notin uy$ ولكن uy هي مجاورة للنقطة y لا تحوي x

ومنه ينتج أن G هو T_0 فضاء.



الزمر الجزئية: لتكن G زمرة طبولوجية و H زمرة جزئية جبرية من G، ولنزود H بالطبولوجية النسبية الناتجة من كون H مجموعة جزئية من G.

(الطبولوجية النسبية: $\tau_A=\{U\cap A;\ U\in\tau\}$، (X,τ) فضاء طبولوجي، $A\subseteq X$)

وبما أن التطبيق: $g_3: G\times G\to G$ حيث: $(x,y)\to xy^{-1}$

مستمر على $G\times G$ فإن مقصوره مستمر على $H\times H$، وبكلمة أخرى فإن H مزودة بالطبولوجية النسبية تكون زمرة طبولوجية تدعى زمرة طبولوجية جزئية أو اختصاراً زمرة جزئية من G.

ومن المعروف أنه إذا كانت G زمرة طبولوجية و H زمرة جزئية فإن $\bar H$ تكون أيضاً.

بما أن g_3 مستمر حيث G زمرة طبولوجية (حسب المبرهنة: f مستمر ⟸ $f(\bar A)\subseteq\overline{f(A)}$)

ينتج أن:

$$g_3(\overline{A\times B})=g_3(\bar A\times\bar B)=\bar A\bar B^{-1}\subseteq\overline{g_3(A\times B)}=\overline{AB^{-1}}$$

أي أن: $\bar A\bar B^{-1}\subseteq\overline{AB^{-1}}$

كذلك التطبيق: $f: G\to G$ حيث $f: x\to axa^{-1}$ هو أيضاً مستمر.

حسب المبرهنة السابقة يكون: $f(\bar A)\subseteq\overline{f(A)}$ ⟸ $a\bar A a^{-1}\subseteq\overline{aAa^{-1}}$ — (1)

وأما $f_1: G\to G$ حيث $f_1: x\to a^{-1}xa$ أيضاً مستمر.

$axa^{-1}\to x$

(حسب مبرهنة f مستمر ⟸ $\overline{f_1^{-1}(A)}\subseteq f_1^{-1}(\bar A)$) ⟸ $\overline{f_1^{-1}(A)}\subseteq f_1^{-1}(\bar A)$

⟸ $\overline{aAa^{-1}}\subseteq a\bar A a^{-1}$ — (2)

من (1) و (2) ينتج المساواة: $\overline{aAa^{-1}}=a\bar A a^{-1}$

تعريف:

نقول عن الزمرة الجزئية H من G بأنها ثابتة إذا كان $a^{-1}Ha=H$ وذلك من أجل أي $a\in G$.

ملاحظة:

إن $\overline{H^{-1}}=\bar H^{-1}$ وذلك لأن:

$$x\in\overline{H^{-1}}\Leftrightarrow\forall U\in V(x);\ U\cap H^{-1}\neq\emptyset\Leftrightarrow\forall U^{-1}\in U(x^{-1});\ U^{-1}\cap H\neq\emptyset$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}\in\bar H\Leftrightarrow x\in\bar H^{-1}$$

ومنه فإن: $\overline{H^{-1}}=\bar H^{-1}$

مبرهنة: إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة طبولوجية G فإن $\bar{H}$ تكون أيضاً،
وإذا كانت H ثابتة فإن $\bar{H}$ تكون أيضاً،

البرهان:

من المعروف أنه إذا كانت G زمرة جبرية، وإذا كانت $A \subseteq G$ فإن A تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان: $AA^{-1} \subseteq A$ وعليه:

$\bar{H}\bar{H}^{-1} \subseteq \overline{HH^{-1}}$ حسب ملاحظة سابقة

$HH^{-1} \subseteq H \Rightarrow \overline{HH^{-1}} \subseteq \bar{H}$ } $\Rightarrow \bar{H}\bar{H}^{-1} \subseteq \bar{H} \Rightarrow \bar{H}$ زمرة جزئية من G

وكذلك بما أن التطبيق في $G \times G$ فإن مقصوره على $\bar{H} \times \bar{H}$ يكون أيضاً مستمر.

وبالتالي فإن $\bar{H}$ تكون زمرة طبولوجية جزئية من G.

وإذا كانت H ثابتة فإن $a^{-1}Ha = H$ ، $\forall a \in G$ وعليه: $\overline{a^{-1}Ha} = \bar{H}$

حيث $\forall a \in G \Leftarrow$ $a^{-1}\bar{H}a = \bar{H}$ حيث $\forall a \in G \Leftarrow$ $\bar{H}$ ثابتة،

ملاحظة:

الحالة الخاصة الزمرة وحيدة العنصر $\{e\}$ هي زمرة جزئية من G وهي أيضاً ثابتة لأن:

$$a^{-1}\{e\}a = \{a^{-1}ea\} = \{e\}$$

حسب المبرهنة السابقة يكون $\overline{\{e\}}$ هي ثابتة.